Transformation de Laplace

Il s'agit ici d'une introduction élémentaire à la transformation de Laplace, utile en Sciences de l'Ingénieur. La transformation de Laplace permet notamment de résoudre aisément les équations différentielles linéaires à coefficients constants par l'usage de tables de transformées.

1 Intégrales généralisées

Soit une fonction f définie et continue sur $[a, +\infty[$. On définit l'*intégrale généralisée* de f entre a et $+\infty$ par

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{X \to +\infty} \left(\int_a^X f(x)\,dx \right) \tag{1}$$

L'intégrale généralisée n'a un sens que si la limite qui figure dans le membre de droite de (1) est *finie*. On dit alors que l'intégrale est *convergente*. Dans le cas contraire, l'intégrale généralisée est *divergente*.

La définition d'une intégrale généralisée est donc analogue à celle d'une série. Cependant, dans le cas d'une série, on a affaire à une somme *discrète* sur un domaine infini, tandis que dans le cas d'une intégrale généralisée, il s'agit d'une somme *continue* sur un domaine infini.

Exemple 1 L'intégrale généralisée $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est-elle convergente ? Pour répondre à cette question, calculons, pour tout $X \geq 1$,

$$I(X) = \int_1^X \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_0^X = 1 - \frac{1}{X}.$$

On a $\lim_{X \to +\infty} I(X) = 1$. Donc I est convergente et

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1. \tag{2}$$

Exemple 2 Soit l'intégrale généralisée $J_\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$, où $\lambda > 0$ est un paramètre. J_λ est-elle convergente ? On a, pour tout $X \geq 0$,

$$J_\lambda(X) = \int_0^X e^{-\lambda t}\,dt = -\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda X} - 1\right).$$

Puisque $\lambda > 0$, on a $\lim_{X \to +\infty} J_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}$. Donc I est convergente et

$$J_\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}. \tag{3}$$

2 Transformation de Laplace

2.1 Fonctions causales

Dans les applications, on étudie des phénomènes qui dépendent du temps, et qui commencent à un instant précis qu'on prend pour origine. On appelle donc *fonction causale* toute fonction $y = f(t)$ vérifiant $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Exemple 3 La fonction *échelon-unité*, ou *fonction de Heaviside*, est définie par

$$\mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geq 0 \ ; \ \mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0. \tag{4}$$

Sa représentation graphique est donnée figure 1.

Exemple 4 La fonction *échelon-vitesse*, ou *fonction rampe*, est

$$r(t) = t \text{ si } t \geq 0 \ ; \ r(t) = 0 \text{ si } t < 0. \tag{5}$$

Voir figure 2. On notera que, si $t \neq 0$, $r'(t) = \mathcal{U}(t)$.

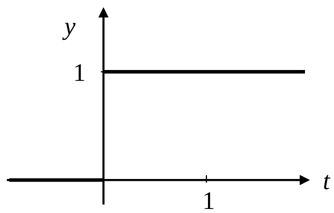

Figure 1 : Echelon-unité

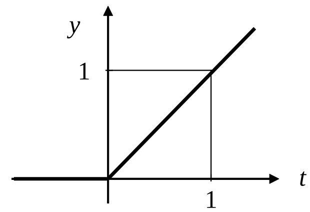

Figure 2 : Echelon-vitesse

Exemple 5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *fonction exponentielle causale* est

$$f_\alpha(t) = e^{\alpha t} \text{ si } t \geq 0, \; f_\alpha(t) = 0 \text{ si } t < 0. \tag{6}$$

Si $\alpha = 0$, on retrouve la fonction de Heaviside. Dans les applications, on a $\alpha < 0$, de telle sorte que la courbe a l'allure suivante :

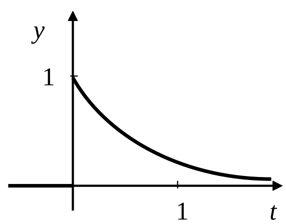

Figure 3 : Exponentielle causale

2.2 Transformation de Laplace

Soit $y = f(t)$ une fonction causale. Sa *transformée de Laplace* est la fonction $F(p)$ définie par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt. \tag{7}$$

On note traditionnellement $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Exemple 6 Calculons la transformée de Laplace de $\mathcal{U}(t)$, fonction de Heaviside, qui est tout simplement la fonction causale constante égale à 1 :

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{U}(t)\, e^{-pt} dt = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X e^{-pt} dt \\ &= \lim_{X \to +\infty} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^X = \lim_{X \to +\infty} \left[\frac{1}{p} \left(1 - e^{-pX} \right) \right]. \end{aligned}$$

L'intégrale généralisée qui définit la transformée de Laplace converge donc si $p > 0$, car dans ce cas la limite de l'exponentielle vaut 0. On a alors

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p}. \tag{8}$$

Exemple 7 La transformée de Laplace de la *fonction rampe* se calcule en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X t e^{-pt} dt \\ &= \lim_{X \to +\infty} \left(\left[-\frac{1}{p} t e^{-pt} \right]_0^X + \frac{1}{p} \int_0^X e^{-pt} dt \right) \\ &= \lim_{X \to +\infty} \left(-\frac{1}{p} X e^{-pX} + \frac{1}{p^2} \left(1 - e^{-pX} \right) \right). \end{aligned}$$

De nouveau, si $p > 0$, l'intégrale généralisée qui définit la transformée de Laplace converge car les exponentielles tendent vers 0 et on obtient

$$\mathcal{L}\left[r\left(t\right)\right] = \frac{1}{p^2}. \tag{9}$$

Exemple 8 Le calcul des transformées de Laplace de l'exponentielle, du sinus et du cosinus est laissé au lecteur (Exercice 1). On obtient

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right] = \frac{1}{p-\alpha} \tag{10}$$

$$\mathcal{L}\left[\sin \omega t\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \tag{11}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos \omega t\right] = \frac{p}{p^2+\omega^2} \tag{12}$$

La table ci-dessous donne quelques transformées de Laplace. Il s'agit là seulement d'une "mini-table". En Sciences de l'Ingénieur, on utilise des tables beaucoup plus complètes.

$f(t)$	$F(p)$
$1 = \mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\frac{1}{b-a}\left[(B-aA)e^{-at}+(Ab-B)e^{-bt}\right]$ avec $a \neq b$	$\frac{Ap+B}{(p+a)(p+b)}$
$\left[A+(B-aA)t\right]e^{-at}$	$\frac{Ap+B}{(p+a)^2}$
$e^{-at}\left[A\cos \omega t + \frac{B-aA}{\omega}\sin \omega t\right]$	$\frac{Ap+B}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\frac{B-aA}{(b-a)(c-a)}e^{-at}+\frac{B-bA}{(a-b)(c-b)}e^{-bt}+\frac{B-cA}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$ avec $a\neq b, b\neq c, c\neq a$	$\frac{Ap+B}{(p+a)(p+b)(p+c)}$

Remarque 1 On notera que *la transformation de Laplace est linéaire*, c'est-à-dire que, pour tout couple de fonctions causales $f\left(t\right)$ et $g\left(t\right)$ et tout couple de réels α et β, on a

$$\mathcal{L}\left[\alpha f\left(t\right)+\beta g\left(t\right)\right] = \alpha\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]+\beta\mathcal{L}\left[g\left(t\right)\right]. \tag{13}$$

En effet, on peut écrire, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right] &= \lim_{X\to+\infty}\int_0^X \left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right] e^{-pt}\,dt \\
&= \lim_{X\to+\infty}\alpha\int_0^X f(t)\,e^{-pt}\,dt+\lim_{X\to+\infty}\beta\int_0^X g(t)\,e^{-pt}\,dt=\alpha\mathcal{L}\left[f(t)\right]+\beta\mathcal{L}\left[g(t)\right].
\end{aligned}$$

2.3 Transformée de Laplace de la dérivée

Ce résultat est le résultat fondamental qui permet d'utiliser la transformation de Laplace dans la résolution des équations différentielles linéaires. Avant de l'énoncer, remarquons qu'une fonction causale peut présenter une discontinuité en 0. C'est notamment le cas de la fonction exponentielle, ou de la fonction de Heaviside. Si $y=f(t)$ est une fonction causale, on pose

$$y\left(0^+\right)=\lim_{t\to 0^+} f(t). \tag{14}$$

Alors on a la *propriété fondamentale* :

$$\mathcal{L}\left[y'\right]=p\mathcal{L}\left[y\right]-y\left(0^+\right). \tag{15}$$

Démonstration On intègre par parties avec $u'=y'(t)$ et $v=e^{-pt}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y'(t)\right] &= \lim_{X\to+\infty}\int_0^X y'(t)\,e^{-pt}\,dt \\
&= \lim_{X\to+\infty}\left(\left[y(t)\,e^{-pt}\right]_0^X+\int_0^X y(t)\,pe^{-pt}\,dt\right) \\
&= \lim_{X\to+\infty}\left(y(X)\,e^{-pX}-y\left(0^+\right)+p\int_0^X y(t)\,e^{-pt}\,dt\right).
\end{aligned}$$

Sous certaines conditions que nous ne préciserons pas, mais qui sont toujours réalisées dans les applications courantes, on a $\lim_{X\to+\infty}\left(y(X)\,e^{-pX}\right)=0$. On obtient donc bien $\mathcal{L}\left[y'(t)\right]=-y\left(0^+\right)+p\mathcal{L}\left[y(t)\right]$.

Remarque 2 Dans la résolution des équations différentielles, $y\left(0^+\right)$ représente la *condition initiale.*

En appliquant deux fois la formule fondamentale (15), on obtient la transformée de Laplace de la dérivée seconde (voir Exercice 2) :

$$\mathcal{L}\left[y''\right]=p^2\mathcal{L}\left[y\right]-py\left(0^+\right)-y'\left(0^+\right). \tag{16}$$

2.4 Transformation de Laplace inverse

Lorsqu'on transforme une fonction $f(t)$ en sa transformée de Laplace $F(p)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$, la fonction $F(p)$ est appelée l'*image* de $f(t)$, et $f(t)$ est appelée l'*original* de $F(p)$. La transformation de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}$ associe à une fonction $F(p)$ son original $f(t)$ par la transformée de Laplace. On a donc :

$$f(t)\ \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}\ F(p)$$

Comme la transformation de Laplace directe $\mathcal{L}$, *la transformation réciproque* $\mathcal{L}^{-1}$ *est linéaire* :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\alpha F(p)+\beta G(p)\right]=\alpha\mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right]+\beta\mathcal{L}^{-1}\left[G(p)\right]. \tag{17}$$

Dans la pratique, on devra calculer les originaux de fonctions données. Si la table de transformées est suffisamment complète, cela se fera par lecture directe de la table.

Exemple 9 Trouver l'original de

$$F(p) = \frac{p+3}{(p+1)^2}.$$

Cette transformée figure dans la ligne 9 de la mini-table de transformées, avec $A = 1$, $B = 3$ et $a = 1$. On lit donc dans la mini-table son original

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+3}{(p+1)^2}\right) = [A + (B - aA)t]\, e^{-at} = (1+2t)\, e^{-t}.$$

Exemple 10 Trouver l'original de

$$G(p) = \frac{p^2+3p+6}{(p-1)(p^2+4)}.$$

Cette fonction ne figure pas dans notre mini-table (mais figurerait dans des tables plus complètes). On décompose $G(p)$ en éléments simples :

$$G(p) = \frac{2}{p-1} + \frac{-p+2}{p^2+4}.$$

Par linéarité de la transformation de Laplace inverse, il vient

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p-1} + \frac{-p+2}{p^2+4}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+4}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2+4}\right). \end{aligned}$$

Les trois originaux figurent dans la mini-table de transformées, aux lignes 3, 4, 5, et on obtient finalement

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p)) = 2e^t - \cos 2t + \sin 2t.$$

3 Application aux équations différentielles

L'intérêt de la transformation de Laplace est de permettre la *résolution rapide*, à l'aide de tables de transformées, des équations différentielles linéaires avec conditions initiales (problème de Cauchy).

Exemple 11 Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y'' - 3y' + 2y = 1,\ y(0) = 0,\quad y'(0) = 3. \tag{18}$$

Bien que, mathématiquement, les fonctions qui interviennent dans le problème soient définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, *on considère que ce sont des fonctions causales lorsqu'on utilise la transformation de Laplace*. Ainsi le 1 qui figure dans le second membre de l'équation différentielle représente-t-il $\mathcal{U}(t)$. De même les conditions initiales s'écrivent-elles $y(0^+) = 2$ et $y'(0^+) = 0$. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle et en utilisant la linéarité, on obtient

$$\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] = \mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] \Leftrightarrow \mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{p}.$$

En utilisant (15) et (16), il vient

$$p^2\mathcal{L}[y] - py(0) - y'(0) - 3[p\mathcal{L}[y] - y(0)] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{p}.$$

En remplaçant les valeurs initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, on aboutit à une équation du premier degré d'inconnue $\mathcal{L}[y]$:

$$\left(p^2 - 3p + 2\right)\mathcal{L}[y] = \frac{1}{p} + 3 = \frac{3p+1}{p} \Leftrightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{3p+1}{p(p^2-3p+2)}.$$

La solution du problème est donc l'original de

$$F(p) = \frac{3p+1}{p(p^2-3p+2)} = \frac{3p+1}{p(p-1)(p-2)}.$$

Cette fraction rationnelle figure dans notre mini-table, dernière ligne, avec $A = 3$, $B = 1$, $a = 0$, $b = -1$, $c = -2$. La solution du problème de Cauchy est donc

$$y = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}[y]) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}e^{2t} - 4e^t.$$

4 Compléments

4.1 Théorème du retard

Soit $y = f(t)$ une fonction causale. *Retarder* de a le phénomène représenté par $f(t)$, cela signifie le faire commencer à l'instant $a > 0$. Il est clair alors (Figure 4) que le phénomène retardé est représenté par $y = f(t-a)$. Le *théorème du retard* s'écrit :

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-ap}\mathcal{L}[f(t)]. \tag{19}$$

En d'autres termes, *retarder une fonction de* $a > 0$ *revient à multiplier sa transformée de Laplace par* e^{-ap}.

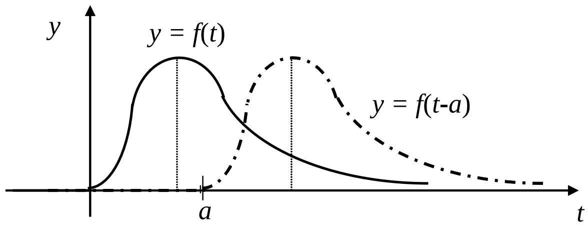

Figure 4

Démonstration En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-a)] &= \lim_{X\to+\infty}\int_0^X f(t-a)\,e^{-pt}dt \\ &= \int_0^a f(t-a)\,e^{-pt}dt + \lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(t-a)\,e^{-pt}dt. \end{aligned}$$

Or la première intégrale est nulle car $f(t-a) = 0$ si $x \in [0,a]$ (Figure 4). Dans la deuxième intégrale, on effectue le changement de variable $u = t - a$. Il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-a)] &= \lim_{X\to+\infty}\int_0^{X-a} f(u)\,e^{-p(u+a)}du \\ &= \lim_{X\to+\infty}\left(e^{-ap}\int_0^{X-a} f(u)\,e^{-pu}du\right) \\ &= e^{-ap}\int_0^{+\infty} f(u)\,e^{-pu}du = e^{-ap}\mathcal{L}[f(t)], \text{ c.q.f.d.} \end{aligned}$$

Le théorème du retard permet notamment de calculer les transformées de Laplace de fonctions en escalier, c'est-à-dire constantes par intervalles, en les exprimant à l'aide de la fonction de Heaviside (Exercices 6 et 7).

4.2 Théorème d'amortissement

Amortir une fonction, cela signifie la multiplier par e^{-at}, où $a > 0$. L'exemple le plus important est la *sinusoïde amortie* (Exercice 16.6 page 182 de *TLM*). Le *théorème d'amortissement* s'énonce ainsi : *posons* $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ *; alors*

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right] = F(p+a). \tag{20}$$

Démonstration Elle est immédiate :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right] &= \lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-at}f(t)\,e^{-pt}dt \\ &= \lim_{X\to+\infty}\int_0^X f(t)\,e^{-(p+a)t}dt = F(p+a). \end{aligned}$$

Exemple 12 Puisque $\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ (ligne 5 de la mini-table), le théorème d'amortissement nous donne

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\sin\omega t\right] = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2} \qquad \text{(ligne 7).}$$